

文章编号:1005-3085(2010)06-1001-08

# 梯形模糊数上的完备度量及其在多属性决策中的应用\*

兰 蓉<sup>1</sup>, 范九伦<sup>2</sup>

(1- 西安电子科技大学工程学院, 西安 710071;

2- 西安邮电学院通信与信息工程学院, 西安 710121)

**摘 要:** 为充分利用梯形模糊数的信息, 本文定义了梯形模糊数上一种新的距离, 证明了该距离具有完备性。利用这种距离, 针对梯形模糊数上的多属性决策问题, 给出了一种基于理想点的决策方法。对属性权重的“归一化”处理使得这种方法具有简单易行的优点, 最后以实例说明了该方法的有效性。

**关键词:** 梯形模糊数; 距离; 完备性; 理想点; 多属性决策

**分类号:** AMS(2000) 68T10; 03E10

**中图分类号:** O235; C934

**文献标识码:** A

## 1 引言

自从 Zadeh 提出模糊集理论以来, 有关模糊理论应用于决策的研究受到学者们的关注<sup>[1,2]</sup>。由于客观现实的复杂性及人类思维的模糊性, 决策信息往往具有不确定性, 因此人们常采用三角模糊数或区间数的形式表示信息<sup>[3-5]</sup>。梯形模糊数比三角模糊数的隶属函数形状更为复杂, 并且将三角模糊数和区间数作为其特例, 因此梯形模糊数能够更好地反映系统的不确定性。文献[6]提出了基于 Hausdorff 度量的梯形模糊数的多属性群决策方法, 运算过程较为复杂。文献[7]提出使用梯形模糊有序加权平均(TFOWA)算子来解决属性值为梯形模糊数形式的决策问题, 但该文没有涉及属性权重也是梯形模糊数的情形。将梯形模糊数应用于决策的关键是定义梯形模糊数间的距离。本文借鉴文献[8]中模糊数之间的距离公式, 给出梯形模糊数之间一种新的距离, 该公式充分考虑到梯形模糊数的信息并且是完备度量。基于该距离公式, 依据传统 TOPSIS 方法的基本思路, 针对属性值和属性权重均为梯形模糊数的多属性决策问题, 给出一种决策方法。该方法通过对由梯形模糊数所表示的属性权重进行归一化处理, 使得决策过程计算量小, 简便易行。

## 2 梯形模糊数上的距离及其完备性

本文在实数集  $\mathbb{R}$  上讨论梯形模糊数问题, 并令  $F(\mathbb{R})$  表示  $\mathbb{R}$  上全体模糊数所构成的集合。

收稿日期: 2008-09-25. 作者简介: 兰蓉(1977年12月生), 女, 讲师. 研究方向: 智能信息处理, 模式识别.

\*基金项目: 陕西省教育厅科研计划项目(09JK720).

**定义1** 设  $\tilde{A} \in F(\mathbb{R})$ , 若  $\tilde{A}$  的隶属函数可表示为

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} 0, & x < A^L, \\ \frac{x-A^L}{A^C-A^L}, & A^L \leq x \leq A^C, \\ 1, & A^C \leq x \leq A^M, \\ \frac{x-A^R}{A^M-A^R}, & A^M \leq x \leq A^R, \\ 0, & x > A^R, \end{cases}$$

则称  $\tilde{A}$  为梯形模糊数, 记作  $\tilde{A} = (A^L, A^C, A^M, A^R)$ . 当  $A^L \geq 0$  时, 称  $\tilde{A}$  为正梯形模糊数. 我们将  $\mathbb{R}$  上全体梯形模糊数所构成的集合记作  $TF(\mathbb{R})$ , 并简记为  $TF$ .

本文借鉴文献[8]中模糊数上的积分型距离, 给出梯形模糊数上一种新的距离. 为此, 对任意的  $\lambda \in [0, 1]$ , 在梯形模糊数的  $\lambda$ -截集  $[A^L + \lambda(A^C - A^L), A^R + \lambda(A^M - A^R)]$  中添加参数  $A^C, A^M$  后得到  $A_\lambda = [A_\lambda^l, A_\lambda^c, A_\lambda^m, A_\lambda^r]$ , 其中

$$A_\lambda^l = A^L + \lambda(A^C - A^L), \quad A_\lambda^c = A^C, \quad A_\lambda^m = A^M, \quad A_\lambda^r = A^R + \lambda(A^M - A^R).$$

**定义2** 设对任意的  $\tilde{A}, \tilde{B} \in TF(\mathbb{R})$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , 令

$$A_\lambda = [A_\lambda^l, A_\lambda^c, A_\lambda^m, A_\lambda^r], \quad B_\lambda = [B_\lambda^l, B_\lambda^c, B_\lambda^m, B_\lambda^r]$$

为相应的  $\lambda$ -截集. 定义映射  $d' : TF(\mathbb{R}) \times TF(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  如下

$$d'(\tilde{A}, \tilde{B}) = \int_0^1 d(A_\lambda, B_\lambda) d\lambda, \quad (1)$$

其中

$$d(A_\lambda, B_\lambda) = \alpha_1 |A_\lambda^l - B_\lambda^l| + \alpha_2 |A_\lambda^c - B_\lambda^c| + \alpha_3 |A_\lambda^m - B_\lambda^m| + \alpha_4 |A_\lambda^r - B_\lambda^r|,$$

且  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0, \alpha_4 > 0$ . 通常可要求  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$ .

容易证明  $d'(\tilde{A}, \tilde{B})$  是  $TF(\mathbb{R})$  上的距离. 因此, 我们有下面的结论.

**定理1**  $(TF(\mathbb{R}), d')$  是度量空间.

**注1** 在(1)式中, 若  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$ , 则  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  可被看作归一化权重. 由于通常认为梯形模糊数中左, 右端点具有相同的功效, 同时“隶属度最大的点”的上、下界也具有同等的重要性, 即  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) 且  $\alpha_3 = \alpha_4$ , 因此,  $\alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1-2\alpha}{2}$ , 故有

$$d'(\tilde{A}, \tilde{B}) = \int_0^1 \left( \alpha |A_\lambda^l - B_\lambda^l| + \frac{1-2\alpha}{2} |A_\lambda^c - B_\lambda^c| + \frac{1-2\alpha}{2} |A_\lambda^m - B_\lambda^m| + \alpha |A_\lambda^r - B_\lambda^r| \right) d\lambda. \quad (2)$$

在本文中, 我们将左, 右端点及“隶属度最大的点”的上、下界同等看待, 即  $\alpha = \frac{1}{4}$ , 则有

$$d'_1(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{4} \int_0^1 (|A_\lambda^l - B_\lambda^l| + |A_\lambda^c - B_\lambda^c| + |A_\lambda^m - B_\lambda^m| + |A_\lambda^r - B_\lambda^r|) d\lambda. \quad (3)$$

在具体应用时, 使用者可根据实际情况灵活地对参数进行选取, 得到合适的计算公式.

**定理2** 度量空间  $(TF(\mathbb{R}), d')$  是完备的.

**证明** 要证明  $(TF(\mathbb{R}), d')$  是完备的, 只需证明  $TF(\mathbb{R})$  中的 Cauchy 列是收敛的即可. 设序列  $\{\tilde{A}_n | n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \subseteq TF(\mathbb{R})$  为 Cauchy 序列, 下面证明该序列是收敛的.

由  $\{\tilde{A}_n | n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$  是 Cauchy 列可知, 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得  $n, m > N$  时, 有

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \int_0^1 |A_{n\lambda}^l - A_{m\lambda}^l| d\lambda + \alpha_2 \int_0^1 |A_{n\lambda}^c - A_{m\lambda}^c| d\lambda \\ & + \alpha_3 \int_0^1 |A_{n\lambda}^m - A_{m\lambda}^m| d\lambda + \alpha_4 \int_0^1 |A_{n\lambda}^r - A_{m\lambda}^r| d\lambda < \varepsilon, \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \int_0^1 |A_{n\lambda}^l - A_{m\lambda}^l| d\lambda &< \frac{1}{\alpha_1} \varepsilon, \quad \int_0^1 |A_{n\lambda}^c - A_{m\lambda}^c| d\lambda < \frac{1}{\alpha_2} \varepsilon, \\ \int_0^1 |A_{n\lambda}^m - A_{m\lambda}^m| d\lambda &< \frac{1}{\alpha_3} \varepsilon, \quad \int_0^1 |A_{n\lambda}^r - A_{m\lambda}^r| d\lambda < \frac{1}{\alpha_4} \varepsilon. \end{aligned}$$

由

$$\int_0^1 (A_{n\lambda}^l - A_{m\lambda}^l) d\lambda = \frac{(A_n^L - A_m^L) + (A_n^C - A_m^C)}{2}$$

以及

$$\left| \int_0^1 (A_{n\lambda}^l - A_{m\lambda}^l) d\lambda \right| \leq \int_0^1 |A_{n\lambda}^l - A_{m\lambda}^l| d\lambda$$

可知

$$\left| \frac{(A_n^L - A_m^L) + (A_n^C - A_m^C)}{2} \right| < \frac{1}{\alpha_1} \varepsilon. \quad (4)$$

由

$$\int_0^1 (A_{n\lambda}^c - A_{m\lambda}^c) d\lambda = A_n^C - A_m^C,$$

可得

$$|A_n^C - A_m^C| < \frac{1}{\alpha_2} \varepsilon. \quad (5)$$

类似地, 我们有

$$\left| \frac{(A_n^R - A_m^R) + (A_n^M - A_m^M)}{2} \right| < \frac{1}{\alpha_4} \varepsilon, \quad (6)$$

$$|A_n^M - A_m^M| < \frac{1}{\alpha_3} \varepsilon. \quad (7)$$

由  $|A_n^L - A_m^L| \leq |(A_n^L - A_m^L) + (A_n^C - A_m^C)| + |A_n^C - A_m^C|$ , 可得

$$|A_n^L - A_m^L| < \left( \frac{2}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) \varepsilon, \quad (8)$$

同理可得

$$|A_n^R - A_m^R| < \left( \frac{1}{\alpha_3} + \frac{2}{\alpha_4} \right) \varepsilon. \quad (9)$$

依据实数集的完备性, 由 (8), (5), (7), (9) 式可知

$$\{A_n^L | n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}, \quad \{A_n^C | n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}, \quad \{A_n^M | n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}, \quad \{A_n^R | n \in \mathbb{N}, n \geq 1\},$$

均为 Cauchy 列, 故均为收敛数列。令

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^L = A^L, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^C = A^C, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^M = A^M, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^R = A^R,$$

可得一个梯形模糊数  $\tilde{A} = (A^L, A^C, A^M, A^R)$ 。

下面证明梯形模糊数序列  $\{\tilde{A}_n | n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$  的极限为  $\tilde{A} = (A^L, A^C, A^M, A^R)$ 。

对任意的  $\varepsilon > 0$ , 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^L = A^L$  可知, 存在  $N_1 \in \mathbb{N}$ , 使得  $n > N_1$  时, 有  $|A_n^L - A^L| < \varepsilon$ ; 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^C = A^C$  可知, 存在  $N_2 \in \mathbb{N}$ , 使得  $n > N_2$  时, 有  $|A_n^C - A^C| < \varepsilon$ ; 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^M = A^M$  可知, 存在  $N_3 \in \mathbb{N}$ , 使得  $n > N_3$  时, 有  $|A_n^M - A^M| < \varepsilon$ ; 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^R = A^R$  可知, 存在  $N_4 \in \mathbb{N}$ , 使得  $n > N_4$  时, 有  $|A_n^R - A^R| < \varepsilon$ 。

取  $N = \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ , 当  $n > N$  时, 有

$$\begin{aligned} \alpha_1 \int_0^1 |A_{n\lambda}^L - A_\lambda^L| d\lambda &= \alpha_1 \int_0^1 |(A_n^L - A^L) + \lambda[(A_n^C - A^C) - (A_n^L - A^L)]| d\lambda \\ &\leq \alpha_1 \int_0^1 |A_n^L - A^L| d\lambda + \alpha_1 \int_0^1 \lambda |(A_n^C - A^C) - (A_n^L - A^L)| d\lambda \\ &= \alpha_1 |A_n^L - A^L| + \frac{\alpha_1}{2} |(A_n^C - A^C) - (A_n^L - A^L)| < 2\alpha_1 \varepsilon. \end{aligned}$$

同理可得

$$\alpha_4 \int_0^1 |A_{n\lambda}^R - A_\lambda^R| d\lambda < 2\alpha_4 \varepsilon.$$

又由

$$\alpha_2 \int_0^1 |A_{n\lambda}^C - A_\lambda^C| d\lambda < \alpha_2 \varepsilon, \quad \alpha_3 \int_0^1 |A_{n\lambda}^M - A_\lambda^M| d\lambda < \alpha_3 \varepsilon,$$

可知  $d'(\tilde{A}_n, \tilde{A}) < (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4)\varepsilon$ 。由  $\varepsilon$  的任意性可得,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_n = \tilde{A}$ 。综上可知, 度量空间  $(TF(\mathbb{R}), d')$  是完备的。

### 3 基于梯形模糊数的 TOPSIS 多属性决策

我们针对属性值与属性权重均由梯形模糊数表示的多属性决策问题, 给出基于理想点的决策方法。考虑到实际的决策环境, 本文所述决策问题均由正梯形模糊数描述。

令  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  为备选方案之集,  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  为属性之集。假设备选方案  $A_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 在各属性的特性由正梯形模糊数来描述

$$A_i = \{\tilde{A}_{ij} | 1 \leq j \leq n\}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

其中  $\tilde{A}_{ij} = (A_{ij}^L, A_{ij}^C, A_{ij}^M, A_{ij}^R)$ 。另外, 设属性权重向量  $W = (\tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \dots, \tilde{W}_n)$ , 其中  $\tilde{W}_j = (W_j^L, W_j^C, W_j^M, W_j^R)$  为属性  $C_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  的权重。

下面利用定义2中的距离, 给出上述问题一种基于 TOPSIS 的决策方法。具体步骤如下:

**步骤1** 对上述多属性决策问题, 由方案在各属性下的取值得到决策矩阵  $D = (\tilde{A}_{ij})_{m \times n}$ , 其中  $\tilde{A}_{ij} = (A_{ij}^L, A_{ij}^C, A_{ij}^M, A_{ij}^R)$ ,  $1 \leq i \leq m$  且  $1 \leq j \leq n$ 。

**步骤2** 根据属性的类型(效益型和成本型)对决策矩阵  $D$  进行规范化处理, 得到规范化决策矩阵为  $R = (\tilde{R}_{ij})_{m \times n}$ , 其中  $\tilde{R}_{ij} = (R_{ij}^L, R_{ij}^C, R_{ij}^M, R_{ij}^R)$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ 。

1) 若  $C_j$  为效益型属性, 则

$$(R_{ij}^L, R_{ij}^C, R_{ij}^M, R_{ij}^R) = \frac{1}{\sum_{i=1}^m A_{ij}^R} (A_{ij}^L, A_{ij}^C, A_{ij}^M, A_{ij}^R), \quad 1 \leq i \leq m; \quad (10)$$

2) 若  $C_j$  为成本型属性, 则

$$(R_{ij}^L, R_{ij}^C, R_{ij}^M, R_{ij}^R) = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{A_{ij}^L}} \left( \frac{1}{A_{ij}^R}, \frac{1}{A_{ij}^M}, \frac{1}{A_{ij}^C}, \frac{1}{A_{ij}^L} \right), \quad 1 \leq i \leq m, \quad (11)$$

经过上述规范化处理之后,  $R_{ij}^L \geq 0$  且  $R_{ij}^R \leq 1$ 。

**步骤3** 借鉴文献[9,10]中的思想确定决策问题的正理想点为  $E^+ = \{(1, 1, 1, 1)_j | 1 \leq j \leq n\}$ , 负理想点为  $F^- = \{(0, 0, 0, 0)_j | 1 \leq j \leq n\}$ 。

**步骤4** 对属性权重进行“归一化”处理。具体过程分两步进行:

1) 采用文献[11]中的公式对属性权重  $\tilde{W}_j = (W_j^L, W_j^C, W_j^M, W_j^R)$  进行解模糊处理, 即

$$w'_j = \frac{W_j^L + W_j^C + W_j^M + W_j^R}{4}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (12)$$

可得数值型属性权重向量, 记作  $W' = (w'_1, w'_2, \dots, w'_n)$ ;

2) 对数值型属性权重向量进行“归一化”, 即

$$w_j = \frac{w'_j}{\sum_{i=1}^n w'_i}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (13)$$

从而得到归一化属性权重向量  $W^N = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ 。

**步骤5** 分别计算方案与正、负理想点之间的距离。方案  $A_i (1 \leq i \leq m)$  与正理想点  $E^+$  之间的距离记为

$$D_i^+ = \text{dis}(A_i, E^+) = \sum_{j=1}^n w_j d'(\tilde{A}_{ij}, \tilde{E}_j),$$

与负理想点  $F^-$  之间的距离记为

$$D_i^- = \text{dis}(A_i, F^-) = \sum_{j=1}^n w_j d'(\tilde{A}_{ij}, \tilde{F}_j).$$

**步骤6** 依据方案的相对贴近度

$$S_i = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-} = \frac{D_i^-}{\text{Dis}(E^+, F^-)} = D_i^-$$

排序, 使  $D_i^-$  最大的方案为最优方案。

**注2** 上述的决策方法是基于理想点法提出的, 但在理想点的具体选择上与传统的理想点法不尽相同。对于备选方案  $A_i (1 \leq i \leq m)$ , 传统的理想点法确定正、负理想点分别为

$$E^{r+} = \left\{ \left( \max_{1 \leq i \leq m} R_{ij}^L, \max_{1 \leq i \leq m} R_{ij}^C, \max_{1 \leq i \leq m} R_{ij}^M, \max_{1 \leq i \leq m} R_{ij}^R \right)_j \mid 1 \leq j \leq n \right\},$$

$$F^{r-} = \left\{ \left( \min_{1 \leq i \leq m} R_{ij}^L, \min_{1 \leq i \leq m} R_{ij}^C, \min_{1 \leq i \leq m} R_{ij}^M, \min_{1 \leq i \leq m} R_{ij}^R \right)_j \mid 1 \leq j \leq n \right\}.$$

本文采用的正、负理想点分别由各属性的绝对最优值、最劣值构成。可以证明,当采用定义2中的距离公式并依据上述步骤进行决策时,两种方式所得方案的最终排序是一致的。事实上,按照传统的理想点法,方案 $A_i$ 的相对贴近度为

$$\begin{aligned} \frac{\text{dis}(A_i, F^{r-})}{\text{dis}(A_i, E^{r+}) + \text{dis}(A_i, F^{r-})} &= \frac{\text{dis}(A_i, F^{r-})}{\sum_{j=1}^n w_j (d'(\tilde{A}_{ij}, E_j^{r+}) + d'(\tilde{A}_{ij}, F_j^{r-}))} \\ &= \frac{\text{dis}(A_i, F^{r-})}{\sum_{j=1}^n w_j d'(E_j^{r+}, F_j^{r-})} = \frac{\text{dis}(A_i, F^{r-})}{\text{dis}(F^{r-}, E^{r+})}, \end{aligned}$$

而对给定的问题,  $\text{dis}(E^{r+}, F^{r-})$  为常值, 因此可直接按照  $\text{dis}(A_i, F^{r-})$  的大小进行排序。

由于  $D_i^- = \text{dis}(A_i, F^{r-}) + \text{dis}(F^{r-}, F^-)$  且  $\text{dis}(F^{r-}, F^-)$  为常值, 因此采用  $\text{dis}(A_i, F^{r-})$  和  $D_i^-$  所得排序结果相同。可见采用本文方法进行决策可以起到简化计算的作用。

## 4 实例分析

为了说明上述方法的有效性, 我们对一个由正梯形模糊数刻画的实例进行分析<sup>[7]</sup>。

现有4个备选企业(方案):  $A_1, A_2, A_3, A_4$ 。从企业技术创新能力角度对企业进行评价, 首先制定了6项评估指标(属性): 创新资源投入能力( $u_1$ )、创新管理能力( $u_2$ )、创新倾向( $u_3$ )、研究开发能力( $u_4$ )、制造能力( $u_5$ )、营销能力( $u_6$ )。现由专家对各企业按上述6项指标进行评估, 假设每个企业在各指标下的属性值如表1所示。假设决策者给出的属性权重均由正梯形模糊数来刻画, 属性权重向量为

$$W = ((0.10, 0.15, 0.18, 0.20), (0.05, 0.07, 0.10, 0.15), (0.20, 0.21, 0.27, 0.30), (0.05, 0.08, 0.13, 0.15), (0.15, 0.17, 0.21, 0.25), (0.10, 0.12, 0.18, 0.20)).$$

试用本文的方法对4个备选企业进行排序。

表1: 各方案的属性值

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
$u_1$	(0.88, 0.90, 0.92, 0.95)	(0.85, 0.87, 0.89, 0.90)	(0.80, 0.82, 0.86, 0.90)	(0.90, 0.94, 0.98, 1.00)
$u_2$	(0.84, 0.86, 0.88, 0.90)	(0.91, 0.93, 0.94, 0.95)	(0.90, 0.92, 0.94, 0.95)	(0.89, 0.90, 0.92, 0.93)
$u_3$	(0.91, 0.94, 0.96, 0.97)	(0.85, 0.87, 0.89, 0.91)	(0.91, 0.92, 0.94, 0.97)	(0.90, 0.92, 0.94, 0.95)
$u_4$	(0.91, 0.93, 0.95, 0.96)	(0.86, 0.88, 0.91, 0.93)	(0.93, 0.95, 0.97, 0.99)	(0.90, 0.92, 0.93, 0.95)
$u_5$	(0.86, 0.88, 0.90, 0.92)	(0.87, 0.89, 0.92, 0.94)	(0.90, 0.91, 0.92, 0.93)	(0.94, 0.96, 0.97, 0.98)
$u_6$	(0.91, 0.92, 0.93, 0.95)	(0.92, 0.93, 0.95, 0.96)	(0.95, 0.97, 0.98, 1.00)	(0.90, 0.93, 0.94, 0.95)

首先, 对表1所示的决策矩阵  $D$  进行规范化处理。由于属性均为效益型, 因此可利用 (10) 式得到规范化决策矩阵  $R$  为

$$\begin{pmatrix} (0.2347, 0.2400, 0.2453, 0.2533) & (0.2252, 0.2306, 0.2359, 0.2413) & (0.2395, 0.2474, 0.2526, 0.2553) \\ (0.2267, 0.2320, 0.2373, 0.2400) & (0.2440, 0.2493, 0.2520, 0.2547) & (0.2237, 0.2289, 0.2342, 0.2395) \\ (0.2133, 0.2187, 0.2293, 0.2400) & (0.2413, 0.2466, 0.2520, 0.2547) & (0.2395, 0.2421, 0.2474, 0.2553) \\ (0.2400, 0.2507, 0.2613, 0.2667) & (0.2386, 0.2413, 0.2466, 0.2493) & (0.2386, 0.2421, 0.2474, 0.2500) \\ \\ (0.2376, 0.2428, 0.2480, 0.2507) & (0.2281, 0.2334, 0.2387, 0.2440) & (0.2358, 0.2383, 0.2409, 0.2461) \\ (0.2245, 0.2298, 0.2376, 0.2428) & (0.2308, 0.2361, 0.2440, 0.2493) & (0.2383, 0.2409, 0.2461, 0.2487) \\ (0.2428, 0.2480, 0.2533, 0.2585) & (0.2387, 0.2414, 0.2440, 0.2467) & (0.2461, 0.2513, 0.2539, 0.2591) \\ (0.2350, 0.2402, 0.2454, 0.2480) & (0.2493, 0.2546, 0.2573, 0.2599) & (0.2332, 0.2409, 0.2435, 0.2461) \end{pmatrix}.$$

其次, 确定该决策问题的正、负理想点:  
1) 正理想点为  $E^+ = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ ;  
2) 负理想点为  $F^- = \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0)\}$ 。  
再次, 对属性权重进行“归一化”可得

$$W^N = (0.1671, 0.0981, 0.2599, 0.1088, 0.2069, 0.1592).$$

最后, 采用 (3) 式计算各方案与负理想点  $F^-$  距离, 得到相对贴近度  $S_i$ , 具体数据见表 2。  
由  $S_2 < S_1 < S_3 < S_4$  可知, 方案  $A_4$  为最优方案。

表 2: 各案的相对贴近度

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
$S_i$	0.9177	0.9015	0.9230	0.9399

5 结论

在将模糊数应用于决策领域的过程中, 如何定义模糊数的距离是一个关键问题。本文借鉴文献 [8] 中模糊数间的距离公式给出了梯形模糊数间一种新的距离, 该表达式以积分的形式计算梯形模糊数的距离, 充分考虑了梯形模糊数的信息。针对属性值与属性权重均为梯形模糊数的多属性决策的问题, 提出了基于 TOPSIS 的决策方法。通过对梯形模糊数型属性权重进行“归一化”处理, 得到归一化的数值型权重, 使得数值型权重向量可以对方案与理想点在不同属性距离进行集结, 较之使用模糊数的乘法运算得到加权规范化决策矩阵的方法, 在计算上相对简单。

参考文献:

[1] Hwang C L, Yoon K. Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications[M]. New York: Springer-Verlag, 1981  
[2] 李登峰. 模糊多目标多人决策与对策[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003  
Li D F. Fuzzy Multiobjective Multi-person Decision Makings and Games[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2003

- [3] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004  
Xu Z S. Uncertain Multi-attribute Decision Approach and Application[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004
- [4] 许叶军, 达庆利. 基于理想点的三角模糊数多指标决策法[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(9): 1469-1471  
Xu Y J, Da Q L. Method for triangular fuzzy number multiple attribute decision making based on ideal solution[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(9): 1469-1471
- [5] 朱建军, 刘思峰, 王蕾华. 群决策中两类三端点区间数判断矩阵的集结方法[J]. 自动化学报, 2007, 33(3): 297-301  
Zhu J J, Liu S F, Wang H H. Aggregation approach of two kinds of three-point interval number comparison matrix in group decision making[J]. Acta Automatica Sinica, 2007, 33(3): 297-301
- [6] 徐玖平. 基于 Hausdorff 度量模糊多指标决策的 TOPSIS 方法[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(10): 84-93  
Xu J P. Technique of order preference by similarity to ideal and anti-ideal alternative for multiple attribute group decision making problems based on Hausdorff metric[J]. System Engineering: Theory and Practice, 2002, 22(10): 84-93
- [7] 许叶军, 达庆利. TFOWA 算子及其在决策中的应用[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2006, 36(6): 1034-1038  
Xu Y J, Da Q L. Trapezoidal fuzzy ordered weighted averaging operator and its application to decision making[J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2006, 36(6): 1034-1038
- [8] 朱章遒, 曹炳元. 具有模糊变量的线性规划问题[J]. 模糊系统与数学, 2008, 22(1): 115-119  
Zhu Z X, Cao B Y. Fuzzy linear programming problems with fuzzy variables[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2008, 22(1): 115-119
- [9] Jahanshahloo G R, Hosseinzadeh, Lotfi F, et al. Extension of the TOPSIS method for decision-making problem with fuzzy data[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 181(2): 1544-1551
- [10] Szmjdt E, Kacprzyk J. A similarity measure for intuitionistic fuzzy sets and its applications in supporting medical diagnostic reasoning[C]// Proc ICAISC'2004, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2004: 388-393
- [11] Chen S M. Evaluating weapon system using fuzzy arithmetic operations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 77(3): 265-276

## New Complete Metric on Trapezoidal Fuzzy Numbers and its Application to Multi-criteria Decision-making

LAN Rong<sup>1</sup>, FAN Jiu-lun<sup>2</sup>

(1- School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071; 2- School of Communication and Information Engineering, Xi'an Institute of Post and Telecommunications, Xi'an 710121)

**Abstract:** In order to make full use of the information of trapezoidal fuzzy numbers, a novel distance on the set of trapezoidal fuzzy numbers is defined and the completeness of the distance is proved in this paper. By using the provided distance, a method based on TOPSIS is presented to deal with the multi-criteria decision-making problem in terms of trapezoidal fuzzy numbers. By normalizing the weights of the criteria, the decision making process is simple. Finally, a practical example is provided to illustrate the method's effectiveness.

**Keywords:** trapezoidal fuzzy number; distance; completeness; ideal point; multi-criteria decision-making

Received: 25 Sep 2008. Accepted: 26 Aug 2010.

**Foundation item:** The Scientific Research Scheme of the Education Department of Shaanxi Province, China (09JK720).